Compléments de dérivation – Fiche de cours

1. Composition de fonctions

1.1 Définition

Définition : Soient u une fonction définie sur I et f une fonction définie sur un intervalle J contenant les valeurs de u.

On appelle **fonction composée** de u par f la fonction notée $f \circ u$ définie sur I par :

$$(f \circ u)(x) = f(u(x)).$$

1.2 Dérivée (formule de chaîne)

Propriété : Si u est dérivable sur I et f est dérivable sur J, alors $f \circ u$ est dérivable sur I et :

$$(f \circ u)'(x) = u'(x)\, f'(u(x)).$$

Remarque : On dérive la fonction extérieure, puis on multiplie par la dérivée de la fonction intérieure.

1.3 Formules usuelles avec une fonction u

Si u est dérivable :

$$(e^u)' = u'e^u \qquad (\ln(u))' = \frac{u'}{u}\ (u > 0)$$

$$(u^n)' = nu'u^{n-1} \qquad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}\ (u > 0)$$

2. Dérivée seconde

2.1 Définition

Définition : Si f est dérivable sur I, on note f' sa dérivée.

Si f' est dérivable sur I, on note f'' sa dérivée : f'' est appelée **dérivée seconde** de f.

3. Convexité

3.1 Fonctions convexes

Définition : Une fonction est dite **convexe** sur un intervalle I si sa courbe représentative est située **au-dessus de ses tangentes** sur I.

3.2 Fonctions concaves

Définition : Une fonction est dite **concave** sur I si sa courbe est située **en-dessous de ses tangentes**.

3.3 Critère avec la dérivée seconde

Propriété : Si f est deux fois dérivable sur I :

$$\begin{cases} f''(x) \geq 0 \Rightarrow f \text{ est convexe sur } I \\ f''(x) \leq 0 \Rightarrow f \text{ est concave sur } I \end{cases}$$

Propriété : Équivalences importantes :

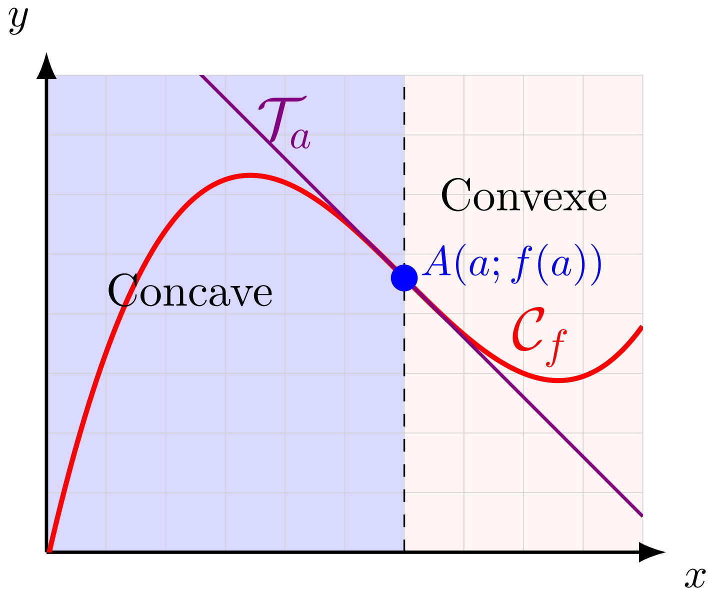
$$f \text{ convexe} \iff f' \text{ croissante}$$

$$f \text{ concave} \iff f' \text{ décroissante}$$

1.4 Point d'inflexion

Définition : Un **point d'inflexion** est un point où la convexité de f change.

Propriété : Si f'' change de signe en $x = a$, alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse a.



2. À retenir

— $(f \circ u)' = u'.f'(u)$.

— Formules usuelles : $(e^u)'$, $(\ln u)'$, $(u^n)'$, $(1/u)'$, $(\sqrt{u})'$.

— f'' permet d'étudier la convexité.

— $f'' \geq 0$: convexe ; $f'' < 0$: concave.

— Changement de signe de $f'' \leq 0 \Rightarrow$ point d'inflexion.