

Logarithme népérien – Fiche de cours

1. Définition et propriétés

1.1 Définition (fonction réciproque de exp)

Définition : La fonction **logarithme népérien**, notée \ln , est définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ et vérifie :

$$\ln(x) = y \iff e^y = x$$

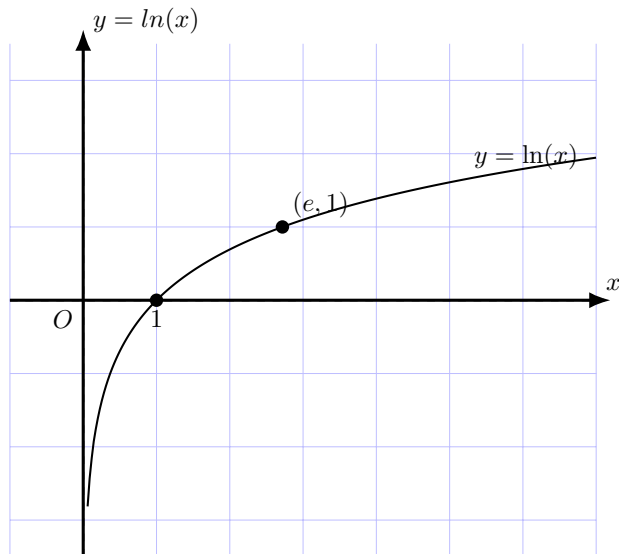
1.2 Propriétés de calcul

Propriété : Pour $a > 0$ et $b > 0$:

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n \ln(a)$ (pour $n \in \mathbb{Z}$)

Propriété : Valeurs à connaître : $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.

1.3 Représentation graphique



2. Variations, signe et limites

2.1 Dérivées

Propriété : Sur $]0, +\infty[$:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$\frac{1}{x} > 0$ sur $]0, +\infty[$, ainsi \ln est **strictement croissante**.

Propriété : Si $u(x) > 0$:

$$(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

2.2 Tableau de variations

x	0 ⁺	1	+∞
$\ln(x)$	-∞ → +∞		

2.3 Signe de ln

x	0 ⁺	1	+∞
$\ln(x)$	-	0	+

2.4 Limites

Propriété :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Remarque : Asymptote verticale : $x = 0$.

1.5 Croissance comparée

Propriété : Pour tout $\alpha > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$$

3. Équations/inéquations avec ln

3.1 Méthodes

Propriété : Pour résoudre (avec condition $x > 0$) :

$$\ln(x) = k \iff x = e^k$$

Propriété : Pour comparer (car ln est croissante sur $]0, +\infty[$) :

$$\ln(x) \leq \ln(a) \iff x \leq a \quad (x > 0, a > 0)$$

4. À retenir

- Domaine : $x > 0$. Asymptote verticale : $x = 0$
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ | $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$ | $\ln(a^n) = n \ln a$
- Dérivées : $(\ln x)' = 1/x$; $(\ln(u))' = u'/u$ (si $u > 0$)
- Signe : $\ln(x) < 0$ sur $]0, 1[$; $\ln(1) = 0$; $\ln(x) > 0$ si $x > 1$
- Les 2 limites de ln et les 2 croissances comparées