Primitives et équations différentielles – Fiche de cours

1. Équation différentielle $y' = f$

Définition : Une équation différentielle est une équation dans laquelle l'inconnue est une fonction et où intervient au moins une de ses dérivées.

1.1 Primitive d'une fonction continue sur un intervalle

Définition : On dit que F est une **primitive** de f sur un intervalle I lorsque F est dérivable sur I et

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in I.$$

Propriété : Toute fonction **continue** sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle (*à une constante près*).

1.2 Primitives usuelles (référence)

Fonction $f(x)$	**Une primitive $F(x)$**
a (constante)	ax
x	$\frac{x^2}{2}$
x^n $(n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
$\frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{Z},\ n \neq 1)$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
e^x	e^x

1.3 Primitives de fonctions composées

Fonction $f(x)$ de la forme	**Une primitive $F(x)$**
$u'\,u^n$ $(n \neq -1; 0)$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'\,e^u$	e^u
$u'\,\cos(u)$	$\sin(u)$
$u'\,\sin(u)$	$-\cos(u)$
$(v' \circ u)\,u'$	$v \circ u$

2. Équation différentielle $y' = ay$

Propriété : L'équation différentielle $y' = ay$ est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre (sans second membre).

Les solutions sont de la forme :

$$y(x) = Ce^{ax} \qquad (C \in \mathbb{R})$$

Remarque : Pour déterminer C, on utilise une condition (valeur initiale, point imposé, etc.).

3. Équation différentielle $y' = ay + b \ (a \neq 0)$

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont de la forme :

$$y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a} \qquad (C \in \mathbb{R})$$

Remarque : Pour déterminer C, on utilise une condition.

4. Équation différentielle $y' = ay + f \quad (a \neq 0)$

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + f(x)$ sont de la forme :

$$y(x) = Ce^{ax} + \varphi(x) \qquad (C \in \mathbb{R})$$

où $\varphi(x)$ est une fonction de même nature que $f(x)$ (solution particulière adaptée à f).

Remarque : Pour déterminer C, on utilise une condition.

5. Principe de résolution des équations différentielles

Propriété :

Solution générale = Solution homogène + Solution particulière.

Remarque : On commence par résoudre l'équation homogène associée, puis on ajoute une solution particulière du second membre (quand il y en a un).